دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

«تمرین درس دینامیک سازه ها»

مجموعه تمرینات سری چهارم

استاد محترم: جناب آقای دکتر تقی خانی

دانشجو:
سینا کاظم زاده آزاد

شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

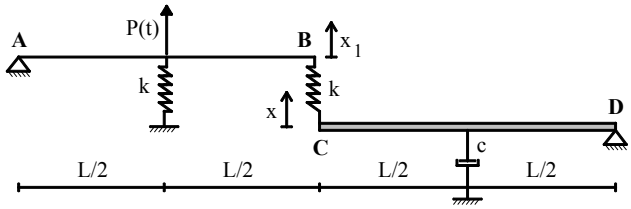
زمان تحویل: ۹۰/۹/۱۲

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

سینا کاظم زاده آزاد شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

مجموعه تمرینات شماره ۴ درس دینامیک سازه ها: (موعد تحویل: ۹۰/۹/۱۲)

۱-۱) مطلوبست تعیین جرم، میرایی، سختی و بار تعمیم یافته برای سازه نشان داده شده در شکل زیر.

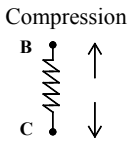


میله AB بدون جرم
میله CD با جرم m

جواب: ابتدا معادله تعادل لنگر حول A برای میله AB با جدا نمودن آن از محل فنر BC نوشته می‌شود:

$$P(t)\frac{L}{۲}-k\frac{x_۱}{۲}\frac{L}{۲}+k(x-x_۱)L=۰ \quad\Rightarrow\quad x_۱=\frac{۲P}{۵k}+\frac{۴x}{۵}$$

با فرض نیروی فشاری در فنر BC $(x > x_۱)$



* اکنون معادله تعادل لنگر حول D برای میله CD با جدا نمودن آن از محل فنر BC نوشته می‌شود.

همچنین بر اساس رابطه $x_۱$ بدست آمده، اثر میله بدون جرم AB در معادله تعادل وارد می شود. داریم:

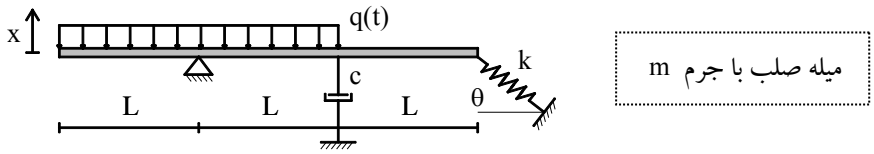
$$k(x-x_۱)L+c\frac{\dot{x}}{۲}\frac{L}{۲}+m\frac{\ddot{x}}{۲}\frac{L}{۲}+I\ddot{\theta}=۰ \quad\Rightarrow\quad k(x-x_۱)L+c\frac{\dot{x}}{۲}\frac{L}{۲}+m\frac{\ddot{x}}{۲}\frac{L}{۲}+\frac{mL^۲}{۱۲}\frac{\ddot{x}}{L}=۰$$

$$kL(x-\frac{۲P}{۵k}-\frac{۴x}{۵})+\frac{c\dot{x}L}{۴}+\frac{m\ddot{x}L}{۴}+\frac{mL}{۱۲}\ddot{x}=۰ \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{m}{۳}\ddot{x}+\frac{c}{۴}\dot{x}+\frac{k}{۵}x=\frac{۲P}{۵}}$$

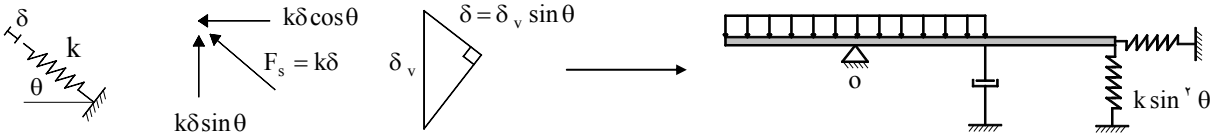
لذا روابط تعمیم یافته به شکل مقابل می باشند:

$$\boxed{\tilde{m}=\frac{m}{۳}\ ,\ \tilde{c}=\frac{c}{۴}\ ,\ \tilde{k}=\frac{k}{۵}\ ,\ \tilde{P}=\frac{۲P}{۵}}$$

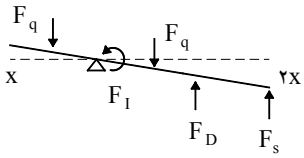
۱-۲) مطلوبست تعیین جرم، میرایی، سختی و بار تعمیم یافته برای سازه نشان داده شده در شکل زیر.



جواب: در ابتدا بر اساس اَشکال زیر مشاهده می شود که با در نظر گرفتن تغییر شکل های کوچک، با تغییرمکان قائم انتهای تیر به اندازه δ_v، تغییرطول فنر برابر $(\delta_v \sin\theta)$ و نیروی قائم فنر $(k\delta_v \sin^2\theta)$ می باشد. لذا می توان فنر مورّب را با دو فنر مطابق شکل زیر معادل که در محدوده تغییر شکل های کوچک، فنر افقی تأثیری در لنگرگیری حول تکیه گاه نخواهد داشت. با بررسی تعادل لنگر حول o:



$$(2xk\sin^2\theta)2L + c\dot{x}L + \left[\frac{m(3L)^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\frac{\ddot{x}}{L} + \left[\frac{qL^2}{2} - \frac{qL^2}{2}\right] = 0$$



ممان اینرسی جرمی حول مرکز میله

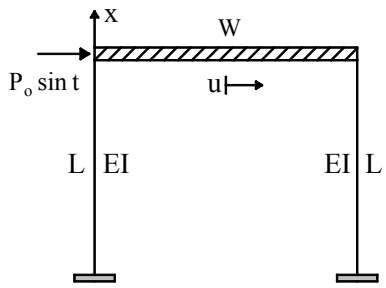
فاصله مرکز میله و محل لنگرگیری

با ساده سازی:

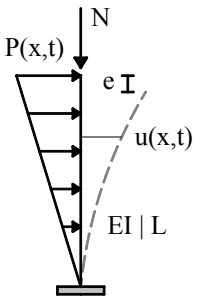
$$mL\ddot{x} + (4kL\sin^2\theta)x + cL\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + (4k\sin^2\theta)x + c\dot{x} = 0$$

لذا روابط تعمیم یافته به شکل مقابل می باشند:

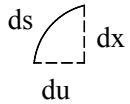
$$\boxed{\tilde{m} = m \quad , \quad \tilde{c} = c \quad , \quad \tilde{k} = 4k\sin^2\theta \quad , \quad \tilde{P} = 0}$$



۲) معادله ارتعاش کف صلب متصل به قاب را با فرض تابع شکل $(\psi(x) = 1 - \cos \pi x/L)$ تعیین نموده و با معادله کلاسیک آن مقایسه نمائید. همچنین مطلوبست تعیین بار بحرانی W_{cr} و مقایسه آن با بار اولر.



جواب: در ابتدا حالت کلی معادلات تعمیم یافته تعیین می شود. بدین منظور ستونی مطابق شکل مقابل تحت بار جانبی و محوری فرض می شود. کار خارجی سیستم با در نظر گرفتن تغییر طول محوری تعیین می شود ولی انرژی کرنشی آن فقط بر اساس تغییرشکل خمشی محاسبه شده است. برای تعیین کار نیروی محوریِ N لازم است ابتدا میزان کاهش طول ستون محاسبه گردد. بدین منظور جزئی از طول ستون مطابق شکل زیر در نظر گرفته می شود:



$$\delta L_{\text{Element}} = ds - dx \approx \sqrt{dx^{۲} + du^{۲}} - dx = dx\sqrt{۱ + u'^{۲}} - dx$$

$$\delta L_{\text{Element}} = dx\sqrt{۱ + u'^{۲}} - dx \xrightarrow[\text{Series}]{\text{Taylor}} \delta L_{\text{Element}} \approx dx\,(۱ + \frac{u'^{۲}}{۲}) - dx$$

و کاهش طول کل ستون:

$$\delta L_{\text{Element}} \approx dx\,(۱ + \frac{u'^{۲}}{۲}) - dx = \frac{u'^{۲}}{۲} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{۱}{۲}\int_{o}^{L} u'^{۲} dx$$

در نتیجه کار خارجی نیروی محوری برابر خواهد بود با:

$$\boxed{W_{ext}^{N} = N.e = \frac{N}{۲}\int_{o}^{L} u'^{۲} dx}$$

کار مجازی خارجی از وریِشن[۱] عبارت فوق حاصل می شود:

$$\delta W_{ext}^{N} = N.\delta e = N\int_{o}^{L} u'\,\delta u' dx$$

* حال می توان اصل کار مجازی را برای ستون فوق نوشت. لازم به ذکر است که بر اساس اصل دالامبر اثر اینرسی ناشی از شتاب، به عنوان یک شبه نیروی خارجی به سیستم اِعمال شده است. بنابراین داریم:

$$\delta W_{ext} = \delta W_{ext}^{P} + \delta W_{ext}^{N} - \delta W_{ext}^{I}$$

$$\delta W_{ext} = \int_{o}^{L} P(x,t)\delta u\, dx + N\int_{o}^{L} u'\,\delta u'\, dx - \int_{o}^{L} m(x)\ddot{u}\,\delta u dx \quad , \quad u = \psi(x)z(t)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{o}^{L} P.\psi\delta z\, dx + N\int_{o}^{L} \psi' z.\psi'\delta z\, dx - \int_{o}^{L} m\psi\,\ddot{z}.\psi\delta z dx$$

(ادامه در صفحه بعدی)

[۱] Variation

لذا کار مجازی خارجی برابر است با:

$$\boxed{\delta W_{ext} = \left[\int_0^L P\psi\, dx + N\int_0^L \psi'^{۲} z\, dx - \int_0^L m\psi^{۲}\, \ddot{z}\, dx \right] \delta z}$$

از سوی دیگر کار داخلی ناشی از انرژی کرنش خمشی برابر است با:

$$W_{int} = \frac{۱}{۲}\int_0^L EI(x) u''^{۲} dx$$

کار خارجی مجازی از وریِشن عبارت فوق حاصل می شود:

$$\delta W_{int} = \int_0^L EI\, u''\, \delta u'' dx$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{u=\psi(x)z(t)} \quad \delta W_{int} = \int_0^L EI\, \psi'' z . \psi'' \delta z dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta W_{int} = \left[\int_0^L EI\, \psi''^{۲} z dx \right] \delta z}$$

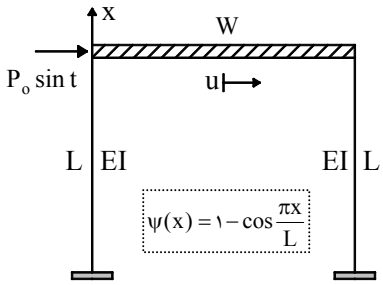
* نهایتاً با تساوی کار مجازی داخلی و خارجی معادله حرکت سیستم حاصل می شود. بر این اساس:

$$\left[\int_0^L P\psi\, dx + N\int_0^L \psi'^{۲} z\, dx - \int_0^L m\psi^{۲}\, \ddot{z}\, dx \right] \delta z = \left[\int_0^L EI\, \psi''^{۲} z dx \right] \delta z \quad \xrightarrow[\text{Arbitrary}]{\delta z}$$

$$\int_0^L m\psi^{۲}\, \ddot{z}\, dx + \int_0^L EI\, \psi''^{۲} z dx - N\int_0^L \psi'^{۲} z\, dx = \int_0^L P\psi\, dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{m}\ddot{z} + (\tilde{k} - \tilde{k}_G) z = \tilde{P}}$$

که در آن:

$$\boxed{\tilde{m} = \int_0^L m\psi^{۲} dx \quad , \quad \tilde{k} = \int_0^L EI\, \psi''^{۲} dx \quad , \quad \tilde{k}_G = N\int_0^L \psi'^{۲} dx \quad , \quad \tilde{P} = \int_0^L P\psi\, dx}$$



* حال به مسأله باز می گردیم. در قسمت اول سؤال خواسته شده است که از اثر نیروی محوری صرفنظر شده ($\tilde{k}_G = ۰$) و معادله حرکت دال تعیین و با معادله کلاسیک مقایسه شود. بر اساس روابط فوق می توان نوشت:

$$\tilde{k} = \int_0^L EI\, \psi''^{۲} dx = ۲ \times \int_0^L \frac{\pi^{۴}}{L^{۴}} EI \cos^{۲}\frac{\pi x}{L} dx = ۲EI\frac{\pi^{۴}}{L^{۴}}\frac{L}{۲} = \frac{\pi^{۴} EI}{L^{۳}}$$

چون جرم متمرکز در انتهای ستون وجود دارد می توان نوشت:

$$\tilde{m} = \int_0^L m\psi^{۲} dx \equiv \sum_{i=۱}^{N} \overline{m}_i \psi_i^{۲}$$

مقدار جرم متمرکز

مقدار تابع شکل در محل جرم متمرکز

در نتیجه برای جرم تعمیم یافته داریم:

$$\tilde{m} = \sum_{i=1}^{N} \overline{m}_i \psi_i^2 = \frac{W}{g} \times \left[1 - \cos\frac{\pi x}{L}\right]_{x=L}^2 = \frac{4W}{g}$$

به شکل مشابه برای بار:

$$\tilde{P} = \int_0^L P\,\psi\,dx \equiv \sum_{i=1}^{N} \overline{P}\,\psi_i = P_o \sin t \left[1 - \cos\frac{\pi x}{L}\right]_{x=L} = 2P_o \sin t$$

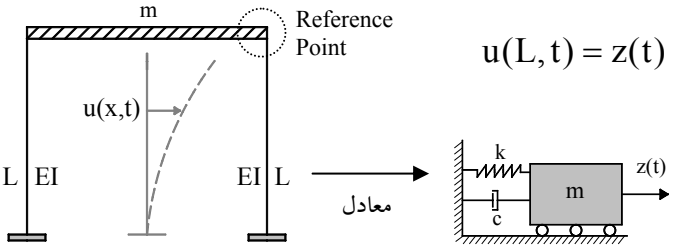
* در نتیجه معادله تعادل به شکل مقابل خلاصه می شود:

$$\frac{4W}{g}\ddot{u} + \frac{\pi^4 EI}{L^3} = 2P_o \sin t$$

لذا:

$$\boxed{\text{Ideal SDOF}: \ \frac{W}{g}\ddot{u} + 24\frac{EI}{L^3} = P_o \sin t} \quad ? \quad \boxed{\text{Generalized SDOF}: \ \frac{W}{g}\ddot{u} + 24/35\frac{EI}{L^3} = \frac{P_o}{2}\sin t}$$

دلیل تفاوت: اختلاف شدیدی بین بار دو سیستم دیده می شود. دلیل این اَمر به مقدار $\psi(x)$ در انتهای ستون باز می گردد. در کتب مرجع[1] ذکر می شود که برای سیستم های پیوسته چنان چه بخواهیم مطابق شکل زیر $u(x,t)$ را با یک تغییرمکان $z(t)$ معادل کنیم، لازم است یک نقطه مرجع انتخاب شود. لذا:



$$u(L,t) = z(t) \ \Rightarrow \ \psi(L)z(t) = z(t) \ \Rightarrow \ \boxed{\psi(L) = 1}$$

برای معادل سازی تغییرمکان بام در سیستم پیوسته
و تغییرمکان سیستم یک درجه آزادی

که در این سؤال $(\psi(L) = 1 - \cos\pi = 2)$ می باشد، و در نتیجه معادله حرکت حاصل شده نشانگر حرکت بام نخواهد بود. چنان چه با تغییری جزئی شرط فوق را برای $\psi(x)$ اِعمال کنیم خواهیم داشت:

$$\overline{\psi}(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{\pi x}{L}\right] \ \Rightarrow \ \overline{\psi}(L) = 1$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI\,\overline{\psi}''^2 dx = 2 \times \int_0^L \frac{\pi^4}{4L^4} EI \cos^2\frac{\pi x}{L} dx = 2EI\frac{\pi^4}{L^4}\frac{L}{8} = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} = \frac{24/35\,EI}{L^3}$$

$$\tilde{m} = \int_0^L m\overline{\psi}^2 dx \equiv \sum_{i=1}^{N} \overline{m}_i \overline{\psi}_i^2 = \frac{W}{g} \times \left[\frac{1}{2}(1 - \cos\frac{\pi x}{L})\right]_{x=L}^2 = \frac{W}{g}$$

[1] Structural Dynamics, M. Paz & W. Leigh, 2004 , **Page 621**

و در مورد بار:

$$\tilde{P} = \int_{o}^{L} P\,\overline{\psi}\,dx \equiv \sum_{i=1}^{N} \overline{P}\,\psi_i = P_o \sin t \times \left[\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi x}{L})\right]_{x=L} = P_o \sin t$$

* در نتیجه معادله تعادل به شکل مقابل خلاصه می شود:

$$\frac{W}{g}\ddot{u} + \frac{\pi^4 EI}{4L^3} = P_o \sin t$$

لذا:

$$\boxed{\text{Ideal SDOF}: \ \frac{W}{g}\ddot{u} + 24\frac{EI}{L^3} = P_o \sin t}$$

$$\boxed{\text{Generalized SDOF}: \ \frac{W}{g}\ddot{u} + 24/35\frac{EI}{L^3} = P_o \sin t}$$

* تطابق موجود به دلیل انتخاب تابع شکلی است که شرایط مرزی را به خوبی ارضا کرده و همچنین تغییرشکل ستون ها را به خوبی پیش بینی می کند. برای تعیین **بار بحرانی** ستون ها بر اساس روابط قبلی:

سختی سیستم:

$$\tilde{k} = \int_{o}^{L} EI\,\overline{\psi}''^2 dx = 2\times\int_{o}^{L}\frac{\pi^4}{4L^4}EI\cos^2\frac{\pi x}{L}dx = 2EI\frac{\pi^4}{L^4}\frac{L}{8} = \frac{\pi^4 EI}{4L^3}$$

سختی هندسی سیستم:

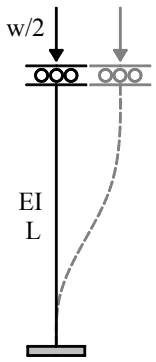
$$\tilde{k}_G = N\int_{o}^{L}\overline{\psi}'^2 dx = W\int_{o}^{L}\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{L}(\sin\frac{\pi x}{L})\right]^2 dx = \frac{W\pi^2}{8L}$$

در حالت بحرانی:

$$\tilde{m}\ddot{z} + (\tilde{k}-\tilde{k}_G)z = \tilde{P} \xrightarrow{\text{Critical}} \tilde{k}-\tilde{k}_G = 0 \Rightarrow \tilde{k} = \tilde{k}_G$$

از دینامیک و روش تعمیم یافته:

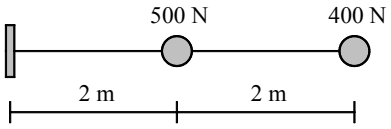
$$\tilde{k} = \tilde{k}_G \Rightarrow \frac{\pi^4 EI}{4L^3} = \frac{W\pi^2}{8L} \Rightarrow \boxed{W_{cr} = 2\frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

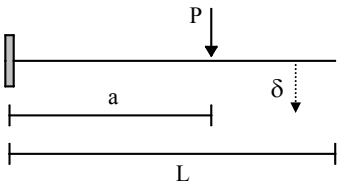


* از پایداری می دانیم که برای ستونی مطابق شکل مقابل و تحت نصف کل بار سقف یعنی (W/2) مقدار بار کمانش اولر از رابطه زیر تعیین می شود. تطابق موجود بین نتایج نشان می دهد که تابع شکل انتخاب شده، شکل تئوریک کمانش ستون را به طرز دقیقی پیش بینی می کند:

$$P_{cr} = \left(\frac{W}{2}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \boxed{W_{cr}^{Euler} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}}$$

۳) فرکانس طبیعی تیر کنسولی زیر تعیین نمائید. از وزن تیر صرفنظر کرده و تابع شکل ارتعاش را بر مبنای تغییرشکل استاتیکی تیر در اثر بارهای وارده در نظر بگیرید. (EI) در کل طول تیر ثابت می باشد.





$$\delta = \begin{cases} \dfrac{Px^{۲}}{۶EI}(۳a - x) & , \quad ۰ \le x \le a \\ \dfrac{Pa^{۲}}{۶EI}(۳x - a) & , \quad a < x \le L \end{cases}$$

جواب: مطابق شکل و روابط فوق، معادله تغییرشکل یک تیر کنسولی تحت بار متمرکز بر اساس مقاومت ارائه شده است. در مورد تغییرشکل ناشی از بار انتهایی داریم:

$$\delta_{۱}(x) = \frac{۴۰۰x^{۲}}{۶EI}(۱۲ - x)$$

و نیز در مورد تغییرشکل ناشی از بار میانی:

$$\delta_{۲}(x) = \begin{cases} \dfrac{۲۵۰x^{۲}}{۳EI}(۶ - x) & , \quad ۰ \le x \le ۲ \\ \dfrac{۱۰۰۰}{۳EI}(۳x - ۲) & , \quad ۲ < x \le ۴ \end{cases}$$

و از جمع دو رابطه فوق:

$$\overset{\text{بی بُعد}}{\psi(x)} = \frac{\delta_{۱} + \delta_{۲}}{L} = \begin{cases} \dfrac{۱۲۵x^{۲}}{۶EI}(۶ - x) + \dfrac{۱۰۰x^{۲}}{۶EI}(۱۲ - x) & , \quad ۰ \le x \le ۲ \\ \dfrac{۲۵۰}{۳EI}(۳x - ۲) + \dfrac{۱۰۰x^{۲}}{۶EI}(۱۲ - x) & , \quad ۲ < x \le ۴ \end{cases}$$

* با مشخص شدن تابع شکل می توان مشابه سؤال قبل مقادیر سختی و جرم تعمیم یافته را تعیین نمود:

$$\tilde{k} = \int_{o}^{L} EI\psi''^{۲}dx = EI\int_{o}^{۲}\left[\frac{۱۲۵x^{۲}}{۶EI}(۶ - x) + \frac{۱۰۰x^{۲}}{۶EI}(۱۲ - x)\right]''^{۲} dx + EI\int_{۲}^{۴}\left[\frac{۲۵۰}{۳EI}(۳x - ۲) + \frac{۱۰۰x^{۲}}{۶EI}(۱۲ - x)\right]''^{۲} dx$$

$$\tilde{k} = \frac{۴۳۰۰۰۰}{EI}\ N/m \quad , \quad \tilde{m} = \sum_{i=۱}^{۲} m_i\psi_i^{۲} = \frac{۵۰۰}{g}[\psi(۲)]^{۲} + \frac{۴۰۰}{g}[\psi(۴)]^{۲} = \frac{۴۰۹۸۳۱۲۳۸}{(EI)^{۲}}\ kg$$

در نتیجه حاصل می شود:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{۴۳۰۰۰۰ \times EI}{۴۰۹۸۳۱۲۳۸}} \Rightarrow \boxed{\omega_n = ۰/۰۳۲\sqrt{EI}}$$